Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Naam docent:
Datum:

Opg 1

1)

a de dimensie van (de vectorruimte) $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ is n^2

b ~~A, B zijn matrices~~ $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

~~voor~~ ...

I $T(A+B) = (A+B)^t - (A+B) = A^t - A + B^t - B$
$= T(A) + T(B)$ dus $T(A+B) = T(A) + T(B)$

II $c \in \mathbb{R}$: $T(c\cdot A) = (c\cdot A)^t - (c\cdot A) = c\cdot A^t - c\cdot A$
$= c\cdot (A^t - A) = c\cdot T(A)$
dus $T(c\cdot A) = c\cdot T(A)$

omdat T aan de bovenstaande 2 eigenschappen voldoet, is T lineair

c $T(M) = M^t - M$

een basis voor $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ is: $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

basis = $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

d $T\begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1&a_3\\a_2&a_4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1-a_1 & a_3-a_2\\a_2-a_3 & a_4-a_4\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ a_1 = willekeurig
$a_3 - a_2 = 0$ $a_2 - a_3 = 0 \Rightarrow a_2 = a_3$
a_4 = willekeurig

basis voor $N(T)$: $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

e de dimensie van $N(T) = 3$, want basis van $N(T)$ bestaat uit 3 vectoren.
dimensie van $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = 4$
uit dimensiestelling volgt:
rank T = dim $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ − dim $N(T) = 4 - 3 = 1$
dus rang $T = 1$

f ~~basis vo~~ één basis voor $R(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

omdat de basis voor $N(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

en de basis voor $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

-6 moet de basis voor $R(T)$ uit één vector bestaan, die samen met de vectoren van de Nulruimte de hele vectorruimte $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ kan ~~omslaan~~ bestaan. Zo'n ~~vec~~ vector is $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

18

Opg 2

22

a $T(a_1, a_2, a_3) = (a_2, -a_1, 2a_3)$

5

standaardbasis $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, -1, 0) = 0 \cdot e_1 + -1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$

$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 0) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$

$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 2) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3$

dus: $[T]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b is T lineair?: $T(a + c \cdot b) = T(a_1 + c \cdot b_1, a_2 + c \cdot b_2, a_3 + c \cdot b_3)$

5

$= (a_2 + c \cdot b_2, -(a_1 + c \cdot b_1), 2(a_3 + c \cdot b_3))$

$= (a_2, -a_1, 2a_3) + (c \cdot b_2, -c \cdot b_1, 2 \cdot c \cdot b_3)$

$= (a_2, -a_1, 2a_3) + c \cdot (b_2, -b_1, 2 \cdot b_3)$

$= T(a) + c \cdot T(b) = T(a + c \cdot b)$

dus: T is lineair

Naam: Morten Bulder	Studentnummer: 1928947	Bladnr.: 2/4
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

vervolg

2 b) is T inverteerbaar?

- als T is inverteerbaar, dan is $[T]_\alpha$ inverteerbaar:
  dat is zo, want $[T]_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- $N(T) = \{0\}$, want als geldt dat,
  $T(a_1, a_2, a_3) = (0,0,0)$, volgt: $a_2 = 0$
  $-a_1 = 0$
  $2a_3 = 0$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$

dus $N(T) = \{0\}$, T is $\underline{1-1}$ injectief
dim $N(T) = 0$

$V \xrightarrow{T} W$; dim V = dim $\mathbb{C}^3$ = dim $W = 3$

dus rang T = dim W, dus T is surjectief

$\Rightarrow$ T is injectief + surjectief : T is inverteerbaar

T is en lineair en inverteerbaar; T is een isomorfie

2 (3) c) $[T]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$= (2-\lambda) \cdot \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2+1)$

$= (2-\lambda)(\lambda - i)(\lambda + i)$

dus $\underline{P(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda - i)(\lambda + i)}$: karakteristieke polynoom

(3) d) uit $P(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-i)(\lambda+i) = 0$ volgt dat
$\lambda = 2$, $\lambda = i$ of $\lambda = -i$

de eigenwaarden van T zijn dus:
$\underline{2, i \text{ en } -i}$

2) ② $E_\lambda = 2$

(6)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dan volgt: $-2x_1 + x_2 = 0$

$-1x_1 - 2x_2 = 0$

$x_3 =$ willekeurig

$-2x_1 + x_2 = 0$

$-1x_1 - 2x_2 = 0$

$\rightarrow 35x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$x_1 = 0$

dus 1e eigenvector is: $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}_{\mathbb{R}}$

$E_\lambda = i$:
$$\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dus: $\left.\begin{array}{l} -ix_1 + x_2 = 0 \\ -1x_1 + -ix_2 = 0 \\ (2-i)x_3 = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_1 = c \cdot -i \\ x_2 = c \cdot 1 \end{array}$ $c \in \mathbb{C}$

dus 2e eigenvector is $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbb{R}}$

$E_\lambda = -i$:
$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} ix_1 + x_2 = 0 \\ -1 \cdot x_1 + i \cdot x_2 = 0 \\ (2+i) \cdot x_3 = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_1 = c \cdot i \\ x_2 = c \cdot 1 \end{array}$

dus 3e eigenvector is $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbb{R}}$

~~dus~~ Concl: $\beta = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

T tov β is ~~deze~~ diagonaalmatrix

$$\left(D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Naam: Morten Bukker	Studentnummer: 1528147	Bladnr.: 3/4
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

21

Opg 3

a
4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\ell_2 - 2\ell_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$ je ziet meteen: rang $A = 3$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zijn 3 lin. onafh. vectoren die samen $\mathbb{R}^3$ opspannen

Daarom: rang $A = 3$

b
7

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

hieruit volgt: $\left.\begin{array}{l} x_1 - x_4 = -3 \\ x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_4 = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = -3 + x_4 \\ x_2 = 3 - 2x_4 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = x_4 \end{array}$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -3 + c \\ 3 - 2c \\ 1 \\ c \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \left[\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \middle| \text{ voor } c \in \mathbb{R} \right]$$

oplossingsverzameling voor $Ax = b$

c) 6

$Ax = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{zie b}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

volgt:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_4 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= x_4 \\ x_2 &= -2x_4 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= x_4 \end{aligned}$$

$$V_2 = \left\{ c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad c \in \mathbb{R} \text{ (of } \mathbb{C})$$

dus de oplossingsverzameling V_2 van $A \cdot x = 0$ is: $V_2 = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ -2c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right\}$ $[c \in \mathbb{R}$ of $\mathbb{C})$

d 4

zoals bij c in een oogopslag kan worden gezien is de dimensie van V_2: 1.

Dit volgt ook uit de dimensiestelling:

$$\begin{aligned} \dim N(T) &= \#\text{kolommen} - \text{rang } A \quad \boxed{\to \text{zie a}} \\ &= 4 - 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Uit deze dimensiestelling volgt dus ook dat $\dim V_2 = 1$

Woonplaats: | Jaar van eerste inschrijving: | Naam docent:

$\boxed{\text{Opg 4}}$

a) de vier eigenschappen zijn:

1^e: $\langle x+z, y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle z,y\rangle$ $\forall x,y,z \in V$

2^e: $\langle c\cdot x, y\rangle = c\cdot \langle x,y\rangle$ $\forall x,y \in V$ en $\forall c \in \mathbb{C}$

3^e: $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ $\forall x,y \in V$

4^e: $(\langle x,x\rangle) > 0$ voor $\forall x \neq 0$ $x \in V$

7

21

b) te bewijzen: $W^\perp$ is een deelruimte van V
drie dingen aan te tonen:

I) bevat $W^\perp$ een 0?
voor 0 geldt dat $\langle 0,y\rangle = 0$, voor alle $y \in W$, dit volgt uit de 2^e eigenschap (zie boven): $\langle 0\cdot x, y\rangle = 0\cdot\langle x,y\rangle = 0 = \langle 0,y\rangle$
$\Rightarrow$ dus $0 \in W^\perp$

II/ $a,b \in W^\perp$; geldt dan ook $(a+b) \in W^\perp$?
voor a en b gelden:
$(a,y) = 0$ voor alle $y \in W$
$(b,y) = 0$ voor alle $y \in W$
$(a+b,y) = (a,y) + (b,y)$ (1^e eigenschap!)
$= 0 + 0$
$= 0$ $\forall y \in W$
dus: voor $a,b \in W^\perp$ geldt dat
$(a+b,y) = 0$ $\forall y \in W \Rightarrow (a+b) \in W^\perp$

III $a \in W^\perp$ $c \in \mathbb{C}$; geldt nu ook: $c\cdot a \in W^\perp$?
$\langle c\cdot a, y\rangle = c\cdot\langle a,y\rangle = c\cdot 0 = 0$ $\forall c \in \mathbb{C}$ $\forall y \in W$
dus: $c\cdot a \in W^\perp$

7

Kortom: $W^\perp$ voldoet aan de drie eisen, is dus deelruimte.

4] c) Te bewijzen: $W \cap W^{\perp} = \{0\}$

bewijs (uit het ongerijmde);
neem een x waarvoor geldt:
$x \in W$, $x \in W^{\perp}$ én $x \neq \{0\}$

voor x zou nu moeten gelden;
$\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in W$.
$x \in W$; neem nu $y = x$
er zou voor de $x \neq 0$ moeten gelden:
$(x, x) = 0 \quad x \neq 0$
Dit levert een tegenspraak op met een van de 4 eigenschappen, of daaruit afgeleide ~~...~~ eigenschappen dat
$\langle x, x \rangle > 0$ voor $x \neq 0$ ↯
Kortom: de verzameling $\{W \cap W^{\perp}\}$ bevat geen vectoren ongelijk aan 0.
$\{W \cap W^{\perp}\}$ bevat wel $\{0\}$, want W is een ~~...~~ deelruimte en $W^{\perp}$ is een deelruimte van V;
bevatten dus beide een $\{0\}$.
En daarom geldt dus; $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.

7